数理解析研究所講究録
167巻 1972年 46-51

最尤推定量の一致性について.

和歌山大学　経済学部　松田忠之

§1. 序

最尤推定量(MLE)の一致性(strong consistency)を示すためには. 尤度関数の局所的微分可能を仮定する場合と. 微分可能性を仮定しないWald [1]の方法がある. ここではWaldによって与えられた条件とほとんど同じ位弱い条件の下で. MLEの一致性の収束程度を示す. 証明の方法は. Bahadur [2]による.

§2. 記号と仮定

$(X, \mathcal{A})$をsample spaceとする. parameter space Θはk次元Euclidean space Eの部分集合とし. $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$をparameter θをもつX上の確率分布の族とする. さらにθ_0をΘの真の値とする.

ASSUMPTION I. $\{P_\theta : \theta \in \Theta\} \ll \mu$ (σ-f. measure)

この時. $\dfrac{dP_\theta}{d\mu} = f(x, \theta)$と書く.

ASSUMPTION 2. 次の条件を満足する $A \in \mathcal{A}$ が存在する.

(1) $P_{\theta_0}(A) = 0$

(2) 任意の $x \in X - A$, $\theta \in \Theta$, $\varepsilon > 0$ に対して,開部分集合 $G \subset \{t \in \Theta :\ |\theta - t| < \varepsilon\}$ が存在して, $f(x,\theta) - \varepsilon < f(x,t)$, $\forall t \in G$, が成立する.

ASSUMPTION 3. 次の条件を満足する $B_\theta \in \mathcal{A}$ が存在する.

(1) $P_{\theta_0}(B_\theta) = 0$,

(2) 任意の $x \in X - B_\theta$ に対して, $f(x,t)$ は $t = \theta$ で上半連続.

E^*を E の一点コンパクト化とし, Θ の E^*における閉包を Θ^* で表わす.

ASSUMPTION 4. 次の条件を満足する $D \in \mathcal{A}$ が存在する.

(1) $P_{\theta_0}(D) = 0$,

(2) 任意の $x \in X - D$ と任意の $t \in \Theta^* - \Theta$ に対して, $\lim_{\theta \to t,\, \theta \in \Theta} f(x,\theta)$ が存在する.

この時, $t \in \Theta^* - \Theta$ に対して,

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \lim_{\theta \to t,\, \theta \in \Theta} f(x,\theta), \quad x \in X - D, \\ &= 0, \quad x \in D \end{aligned}$$

と定義する．明らかに，$\int f(x,t)\,d\mu \leq 1$．

ASSUMPTION 5．　任意の $\theta \in \Theta^*$, $\theta \neq \theta_0$, に対して

$$P_{\theta_0}\{ f(x,\theta) \neq f(x,\theta_0) \} > 0.$$

$t \in \Theta^*$ に対して．$h(x,\theta_0,t) = \dfrac{f(x,t)}{f(x,\theta_0)}$ $(f(x,\theta_0) > 0)$;

$= 0$ $(f(x,\theta_0) = 0)$ と定義すれば．ASSUMPTION 1, 2, 4 から Θ^* の任意の開部分集合 I に対して．$\sup_{t \in I} h(x,\theta_0,t)$ は $\mathcal{A}$ − meas. function となる．従って．

$G(a:\theta_0, I) = \int \sup_{t \in I} h(x,\theta_0,t)^a f(x,\theta_0)\,d\mu$, $0 < a < 1$,

と定義する．

ASSUMPTION 6．　任意の $\theta \in \Theta^*$, $\theta \neq \theta_0$, に対して．$G(a:\theta_0, I(\theta)) < \infty$ となる θ を含む Θ^* の開部分集合 $I(\theta)$ が存在する．ここで a, $0 < a < 1$, は θ に無関係な定数である．

§ 3．　Theorem．

確率空間 $(X, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ の n 個の直積空間を $(X^n, \mathcal{A}^n, \{P_\theta^n\})$ で表わす．

定義．　任意の自然数 n に対して．X^n から Θ^* への関数 T_n が $\mathcal{A}^n$− meas. である時、関数列 $\{T_n : n = 1, 2, \cdots\cdots,\}$ を θ の estimate と呼ぶ．§ 2 の仮定の下で次の定理を示す．

定理、　$\{\bar{\theta}_n\}$ を次のような θ の estimate とします．

(1)　$\prod_{i=1}^{n} h(x_i, \theta_0, \bar{\theta}_n) \geq C > 0$,　$P_{\theta_0}^n$ − a.e.

この時、任意の$\varepsilon>0$に対して次の不等式を満足するようなg ($0<g<1$) とM (>0) が存在します。

$$P^n_{\theta_0}(|\bar{\theta}_n-\theta_0|\geq\varepsilon)\leq MC^{-a}g^n, \quad \forall n,$$

(勿論 上の結果は$\{\bar{\theta}_n\}$の一致性を含みます。)

§4. Lemmas.

$\theta\in\Theta^*, \theta\neq\theta_0$, に対して $g(a;\theta_0,\theta)=\int h(x,\theta_0,\theta)^a f(x,\theta_0)\,d\mu$, $0<a<1$, と定義する。この時次の簡単なLemmasが示される。

補題 1. ASSUMPTION 1. 4の下で

(1) $g(a;\theta_0,\theta)\leq 1$.

(2) $\lim\limits_{a\to 0} g(a;\theta_0,\theta)=P_{\theta_0}\{f(x,\theta)f(x,\theta_0)>0\}$.

証明 (1)は不等式，$y^a\leq 1+a(y-1)$，$y\geq 0$，より従う。(2)は不等式，$h(x,\theta_0,\theta)^a f(x,\theta_0)\leq f(x,\theta)+f(x,\theta_0)$と有界収束定理から示される。

補題 2. ASSUMPTION 1. 4. 5の下で，$g(a;\theta_0,\theta)<1$.

証明 かりに，$g(b;\theta_0,\theta)=1$となるb ($0<b<1$) と$\theta\in\Theta^*(\theta\neq\theta_0)$が存在するとして矛盾を導く。ASSUMPTION 1. 4. と有界収束定理より，全てのu, $0<u<1$, で

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}g(u;\theta_0,\theta)=\int_F\{\log h(x,\theta_0,\theta)\}^2 h(x,\theta_0,\theta)^u f(x,\theta_0)\,d\mu$$

$$F=\{f(x,\theta)f(x,\theta_0)>0\}.$$

従って，$g(u:\theta_0,\theta)$ は u の凸関数となり，$g(u:\theta_0,\theta)\equiv 1$ である．故に，$\frac{\partial^2}{\partial u^2}g(u:\theta_0,\theta)\equiv 0$，となる．結局，

$$P_{\theta_0}(F)\leqq P_{\theta_0}\{f(x,\theta)=f(x,\theta_0)\}$$

がいえる．ところが補題1より，$P_{\theta_0}\{f(x,\theta)=f(x,\theta_0)\}=1$ となり ASSUMPTION 5 に矛盾する．

補題 3．　ASSUMPTION 1～6 の下で，$G(a:\theta_0,J(\theta))<1$ となる θ を含む Θ^* の開部分集合 $J(\theta)$ が存在する．

証明　　θ の countable base $\{I_n(\theta)\}$ を次のように決める．

$$I_n(\theta)=V_n(\theta)\cap\Theta^*$$

$$V_n(\theta)=\left\{t\in E:|\theta-t|<\frac{1}{n}\right\},\quad(\theta\neq\theta_\infty)$$

$$=\left\{t\in E:|t|>n\right\}\cup\{\theta_\infty\},\quad(\theta=\theta_\infty)$$

ここで，θ_∞ は additional point を表わす．この時，次の事が云える．(a)　$I_n(\theta)\subset I(\theta)$，　n：suff. large，

(b)．$\lim_{n\to\infty}' \sup_{t\in I_n(\theta)} f(x,t)=f(x,\theta)$，　P_{θ_0}－a.e.．

有界収束定理より，$\lim_{n\to\infty}' G(a:\theta_0,I_n(\theta))=g(a:\theta_0,\theta)$ となり補題2から補題3が成立する．

§5.　Proof of theorem.

任意の $\varepsilon>0$ に対して，$K=\{\theta\in\Theta^*:|\theta-\theta_0|\geqq\varepsilon\}$ とおく．K は Θ^* のコンパクト部分集合である．従って補題3から，有限個の開部分集合の列 $\{J(\theta_1),\cdots\cdots,J(\theta_M)\}$ が存在して，

(2) $$K \subset \bigcup_{j=1}^{M} J(\theta_j),$$

(3) $$g = \max_{1 \le j \le M} G(a : \theta_0, J(\theta_j)) < 1.$$

を満足する．もしも，$|\bar{\theta}_n - \theta_0| \ge \varepsilon$ ならば(1),(2)により

$$C^a \le \max_{1 \le j \le M} \prod_{i=1}^{n} \sup\{h(x_i, \theta_0, \theta)^a ; \theta \in J(\theta_j)\},\ P_{\theta_0}^n\text{-a.e.}$$

が成り立つ．故に，マルコフの不等式から，

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}^n(|\bar{\theta}_n - \theta_0| \ge \varepsilon) &\le \sum_{j=1}^{M} P_{\theta_0}^n\left(\prod_{i=1}^{n} \sup\{h(x_i, \theta_0, \theta)^a ; \theta \in J(\theta_j)\} \ge C^a\right) \\ &\le \sum_{j=1}^{M} C^{-a} G(a : \theta_0, J(\theta_j))^n \\ &\le M C^{-a} g^n. \end{aligned}$$

となる．

最後にWaldが与えた仮定と我々の仮定との比較を行う．Waldは ASSUMPTION 5 で $\Theta^* - \Theta$ の唯一の点として無限遠点 ∞ を考えて，そこで $f(x, \infty) = \lim_{\theta \to \infty} f(x, \theta) = 0$，$P_{\theta_0}$-a.e. と仮定する．勿論 ASSUMPTION 4 はこの仮定の一つの拡張になっている．ASSUMPTION 6 は Wald の ASSUMPTION 2 よりもある意味で強い．すなわち，ある $\delta > 0$ に対して，$\int f(x, \theta_0)^{1+\delta} d\mu < \infty$ が成り立つなら ASSUMPTION 6 は ASSUMPTION 2 を含みます．

文　献

[1] Wald, A.: Note on the consistency of the maximum likelihood estimate, Ann. Math. Statist. 20 (1949), 595-601.

[2] Bahadur, R. R.: On the asymptotic efficiency of tests and estimates, Sankhyā, 20 (1960), 229-252.